FÓRMULA PARA EL CÁLCULO DE LOS ÍNDICES DE PRECIOS ELEMENTALES EN LA ELABORACIÓN DE UN IPC

RODRÍGUEZ FEIJOÓ, Santiago
Departamento de Métodos Cuantitativos en E. y G.
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
correo-e: srfeijoo@dmc.ulpgc.es

GONZÁLEZ CORREA, Carlos
Consejería de Economía y Hacienda
Gobierno de Canarias
correo-e: cgoncor@canariastelecom.com

RODRÍGUEZ CARO, Alejandro
Departamento de Métodos Cuantitativos en E. y G.
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
correo-e: arcaro@dmc.ulpgc.es

RESUMEN

En este trabajo se analizan las principales fórmulas con las que se calculan los índices elementales en la elaboración de un IPC, demostrando que todas ellas presentan incongruencias con la teoría del comportamiento del consumidor. Sobre la base de esta teoría, se define una nueva fórmula que se ajusta a lo enunciado por dicha teoría y que, entre otras propiedades cumple la de la reversión temporal. Este nuevo índice se calcula como la media armónica de los ratios de precios ponderada de forma inversa por el nivel de precios en el instante base.

Palabras clave: Números Índices, IPC, Fórmula del Agregado Elemental.

1. Introducción

El precio de una economía y, más concretamente, el control de sus cambios, se ha convertido en uno de los objetivos prioritarios en el marco del análisis macroeconómico. En esta línea y en el ámbito de la Unión Europea, esta medida juega un papel fundamental en las deliberaciones del Banco Central Europeo.

El primer paso para alcanzar este objetivo consiste en disponer de una medida fiable de la inflación. Para ello se hace uso de la Teoría de los Números Índices con el fin de elaborar un Índice de Precios de Consumo (IPC). Este pretende obtener, de forma agregada, la tasa a la que los precios de un conjunto de bienes y servicios adquiridos por las familias ha cambiado entre dos instantes de tiempo en un determinado territorio. Dado que las familias adquieren un conjunto amplio de bienes y servicios y, tanto los precios como las cantidades compradas cambian de forma desigual, el IPC debe ser una función que venga determinada por las variaciones individuales de los precios y las cantidades. El problema es cómo concentrar todos estos cambios en una única medida que sea lo más representativa posible de todos ellos. Con el fin de mejorar esta representatividad, la elaboración del IPC ha sufrido múltiples y continuos cambios, tanto en la información estadística como en las expresiones matemáticas utilizadas para su cálculo.

La cuestión que se plantea en este trabajo se refiere únicamente a la primera fase de elaboración de un IPC. En concreto, el trabajo se centra en las fórmulas con las que se elaboran los índices elementales, no entrando a abordar otras cuestiones relevantes, tales como el diseño muestral, la selección de productos, los cambios de calidad, los cambios de establecimientos o la fórmula agregada.

A lo largo del trabajo se demuestra que las fórmulas más utilizadas para el cálculo de los índices elementales presentan incompatibilidades con la Teoría del Consumidor, por lo que se propone una nueva fórmula para su cálculo, que, además de satisfacer los principales axiomas que debe cumplir un índice elemental, es congruente con dicha teoría.

En lo que sigue, el trabajo se estructura en tres partes. En el epígrafe segundo se presentan las fórmulas más utilizadas para el cálculo de los índices elementales, indicando las ventajas e inconvenientes que la literatura sobre el tema ha identificado en cada caso. En el punto tercero se analizan comparativamente las tres fórmulas que la Unión Europea permite a la hora de elaborar los índices elementales necesarios para obtener el Índice de Precios de Consumo Armonizado (IPCA), analizando, mediante un ejemplo numérico, su congruencia con la Teoría del Consumidor. La falta de consistencia de las tres nos lleva a plantear una nueva expresión más acorde con el comportamiento de los consumidores. En el epígrafe 4 se reseñan las principales conclusiones obtenidas.

2. La fórmula de cálculo del índice elemental para elaborar un IPC

El IPC es un indicador estadístico cuyo objetivo es medir la inflación. Para ello, en su cálculo se tienen en cuenta los precios y cantidades de los bienes y servicios consumidos por una determinada población. Estos productos se subdividen en grupos de forma sucesiva buscando cada vez un mayor nivel de homogeneidad dentro de cada subdivisión, hasta llegar a los agregados elementales, que conforman la unidad más pequeña sobre la cual se va a calcular la inflación. Desde el punto de vista de la información disponible, el nivel elemental se caracteriza y define por aquél para el cual solo se dispone de información sobre precios, no disponiendo de datos sobre las cantidades consumidas.

Dado el volumen de operaciones de consumo que realizan las familias es imposible calcular el verdadero cambio en precios y lo que se hace es obtener una estimación del mismo a través del IPC. En este objetivo, uno de los primeros pasos consiste en determinar qué precios son los que van a medir la inflación en cada uno de los agregados elementales. Las dos formas más habituales para representarlos son, bien seleccionando un artículo representativo del mismo, bien realizando una muestra aleatoria entre los productos que contiene dicho agregado. Si se toma la primera opción, el primer paso consiste en obtener un conjunto de precios de un mismo producto tomados en distintos establecimientos. Si se toma la segunda opción, también se necesita un conjunto de precios, pero éstos, además de obtenerse en distintos establecimientos, pueden hacer referencia a distintos productos.

El cálculo de todo IPC se realiza en dos fases. En la primera fase se calculan, con los precios anteriormente comentados, los índices para cada uno de los agregados elementales. La segunda fase utiliza los índices de los agregados elementales y la importancia de cada agregado en el gasto total para elaborar el IPC a cualquier nivel de agregación deseado.

El primer problema, a la hora de definir una fórmula ideal para el índice elemental, es que, a este nivel, solo se dispone de los precios, con lo cual no es posible calcular la importancia de cada uno de ellos dentro del total del agregado. Esto obliga a trabajar con fórmulas no ponderadas. Siguiendo a ILO (2003), las más utilizadas son la de Dutot (I_D), la de Carli (I_C), la de Jevons (I_J), la de Jevons-Coggeshall (I_{JC}) y la de Fisher (I_F). Para el cálculo de la inflación dentro del agregado elemental i en el instante 1 con respecto al instante 0, se utilizan las expresiones [1] a [5], siendo ${}^{k}p_i^t$ el precio k-ésimo perteneciente al agregado elemental i en el instante t={1,0} y K_i el número de precios observados en dicho agregado.

$$I_D = \frac{\frac{1}{K_i}\sum_{k=1}^{K_i} {}^{k}p_i^1}{\frac{1}{K_i}\sum_{k=1}^{K_i} {}^{k}p_i^0} \qquad [1]$$

$$I_C = \frac{1}{K_i}\sum_{k=1}^{K_i} \frac{{}^{k}p_i^1}{{}^{k}p_i^0} \qquad [2]$$

$$I_J = \sqrt[K_i]{\prod_{k=1}^{K_i} \frac{{}^{k}p_i^1}{{}^{k}p_i^0}} \qquad [3]$$

$$I_{JC} = \left[\frac{1}{K_i}\sum_{k=1}^{K_i} \left[\frac{{}^{k}p_i^1}{{}^{k}p_i^0} \right]^{-1} \right]^{-1} \qquad [4]$$

$$I_F = \sqrt{I_C * I_{JC}} \qquad]5]$$

Como se puede deducir de estas expresiones, la fórmula de Dutot es el cociente entre las medias aritméticas de los precios en el instante 1 y 0 respectivamente, mientras que en el resto de los casos los promedios se calculan con respecto a índices y no a precios. De esta manera, la expresión de Carli no es más que la media aritmética de los índices de precios simples, la de Jevons coincide con la media geométrica de los mismos, la de Jevons-Coggeshall con la armónica y la de Fisher con la media geométrica de la de Carli y la de Jevons-Coggeshall.

Desde el punto de vista axiomático, la fórmula que cumple más propiedades deseables es la de Jevons, seguida de la de Dutot, la de Fisher, la de Carli y la de Jevons-Coggeshall. Estas dos últimas incumplen, entre otras, la propiedad de reversión temporal, siendo la de Carli un límite superior y la de Jevons-Coggeshall un límite inferior. Esta propiedad se puede enunciar diciendo que, si los precios en los instantes de tiempo 0 y t son iguales, para cualquier instante temporal t' comprendido entre ellos, se debe cumplir que el índice entre t' y 0 multiplicado por el índice entre t y t' debe ser igual a la unidad. La propiedad de reversión temporal es especialmente importante si el IPC se va a calcular de forma encadenada. Por ejemplo, en la primera parte de la tabla 1 se muestran los precios de un mismo producto en dos puntos de venta distintos para tres períodos de tiempo. Como se puede observar, los precios en el período cero son los mismos que en el período 2 (reversión temporal de los precios). Por ello, el índice calculado para el período 2 con base en 0 debiera ser igual a 1, tanto si se calcula de forma directa como si se hace encadenado a través del instante 1.

En L1 se calculan los índices de Carli con base en 0 para los tres instantes de tiempo. Como se puede observar, conjuntamente los precios han crecido un 30% en el período 1 con respecto al 0 y un 0% si comparamos el 2 con el 0. En la línea L2 se calcula el $I_{C(1/0)}$, que es igual a 1,3, y el $I_{C(2/1)}$, que vale 0,836. Por último, en la L3 se obtiene el índice de Carli encadenado, de tal manera que $I_{C(2/0)}=I_{C(1/0)}\times I_{C(2/1)}=1{,}086$. Es decir, usando Carli encadenado se estaría diciendo que desde el instante 0 al 2 el precio del agregado elemental en estudio ha crecido un 8,6%. Con la fórmula de Carli se obtiene siempre un sesgo positivo o cero, mientras que con la de Jevons-Coggeshall el sesgo obtenido es negativo o cero. La relación entre la media aritmética y la armónica permite que la fórmula de Fisher cumpla la propiedad de reversión temporal.

Tabla 1. La propiedad de reversión temporal y el I_C

		Tiempo		
		0	1	2
Punto de venta	1	12	20	12
	2	15	14	15
L1	$I_{C(t/0)}$	1,000	1,300	1,000
L2	$I_{C(t/t-1)}$		1,300	0,836
L3	$I_{C(t/0)}=\prod_{j=1}^{t} I_{C(j/j-1)}$	1,000	1,300	1,086

La fórmula de Dutot incumple únicamente la propiedad de proporcionalidad. Esta propiedad tiene una importancia que depende directamente de la forma en cómo se seleccionan los artículos que representan al agregado elemental. Si el agregado elemental se representa por un único artículo, existe una única unidad de medida y, por tanto, una homogeneidad total. En este caso, tienen sentido las medias de los precios en cada instante de tiempo y la fórmula de Dutot es tan válida como la de Jevons. Por el contrario, si los precios con los que se calcula el índice elemental se corresponden con productos distintos, incluso con unidades de medida distintas, la fórmula de Dutot empieza a no ser válida. En consecuencia, la validez o no de la fórmula de Dutot depende directamente del grado de homogeneidad de los productos que contiene el agregado elemental, o lo que es lo mismo, de si las medias aritméticas de precios tienen o no sentido.

Circunscribiéndose a estas dos fórmulas, la de Dutot y Jevons, junto con la de Carli (la más utilizada hasta hace un par de décadas) y desde el punto de vista de su formulación, las diferencias numéricas se deben a las distintas ponderaciones que cada una de ellas utiliza a la hora de resumir los datos. En el índice de Carli, todos los índices simples tienen la misma ponderación, cuyo valor es $1/K_i$, siendo K_i el número de índices que se promedian. Por tanto, la existencia de valores extremos en los ratios de precios provoca un desplazamiento sensible en el I_C hacia dichos valores extremos.

Para analizar la ponderación en la fórmula de Dutot, partiendo de la expresión [1], siguiendo los pasos que se muestran en [6], se concluye que cada ratio de precios está ponderado por la importancia del precio en el período de referencia con respecto a la suma de todos los precios para dicho período.

$$I_D = \frac{\frac{1}{K_i}\sum_{k=1}^{K_i} {}^k p_i^1}{\frac{1}{K_i}\sum_{k=1}^{K_i} {}^k p_i^0} = \frac{\sum_{k=1}^{K_i} {}^k p_i^1 \times \frac{{}^k p_i^0}{{}^k p_i^0}}{\sum_{k=1}^{K_i} {}^k p_i^0} = \sum_{k=1}^{K_i}\left[\frac{{}^k p_i^0}{\sum_{k=1}^{K_i} {}^k p_i^0} \times \frac{{}^k p_i^1}{{}^k p_i^0}\right] \qquad [6]$$

Por tanto, en esta formulación, cuanto más alto sea el precio en el período de referencia del índice, su ratio de precios tiene un efecto mayor en el índice final.

En la fórmula de Jevons, todos los ratios tienen la misma ponderación, pero esta no es aditiva sino potencial y multiplicativa, lo cual dificulta la comparación con las otras dos fórmulas.

$$I_J = \prod_{k=1}^{K_i}\left(\frac{{}^k p_i^1}{{}^k p_i^0}\right)^{\frac{1}{K_i}} \qquad [7]$$

Lo que esta claro es que para que los tres resultados coincidan es necesario que todos los ratios de precios coincidan. Esto indica que, de alguna manera, la dispersión en los ratios de precios, y en definitiva, la dispersión de los propios precios, explican las diferencias en los resultados de las tres fórmulas. Carruthers, Sellwood y Ward (1980) demuestran que aproximadamente se cumple [8].

$$I_J \approx I_D * \left[1 + \frac{1}{2}\sigma^2_{e_i^0} - \frac{1}{2}\sigma^2_{e_i^1} \right] \qquad [8]$$

$\sigma^2_{e_i^0}$ y $\sigma^2_{e_i^1}$ son las varianzas de las variables ${}^k e_i^0$ y ${}^k e_i^1$ respectivamente, definidas en [9], siendo $\overline{p}_i^t$ el precio medio aritmético en el estrato elemental i en el instante t={0,1}.

$${}^k e_i^t = \frac{{}^k p_i^t - \overline{p}_i^t}{\overline{p}_i^t} \qquad [9]$$

De forma similar a [8], Dalen (1992) y Diewert (1995) obtienen la expresión [10] que relaciona el índice de Jevons con el de Carli,

$$I_J \approx I_C \times \left[1 - \frac{1}{2} \times \sigma^2_{s_i} \right] \qquad [10]$$

siendo $\sigma^2_{s_i}$ la varianza de la variable ${}^k s_i$ definida como [11].

$${}^k s_i = \frac{\dfrac{{}^k p_i^1}{{}^k p_i^0} - \dfrac{1}{K_i}\displaystyle\sum_{k=1}^{K_i} \dfrac{{}^k p_i^1}{{}^k p_i^0}}{\dfrac{1}{K_i}\displaystyle\sum_{k=1}^{K_i} \dfrac{{}^k p_i^1}{{}^k p_i^0}} \qquad [11]$$

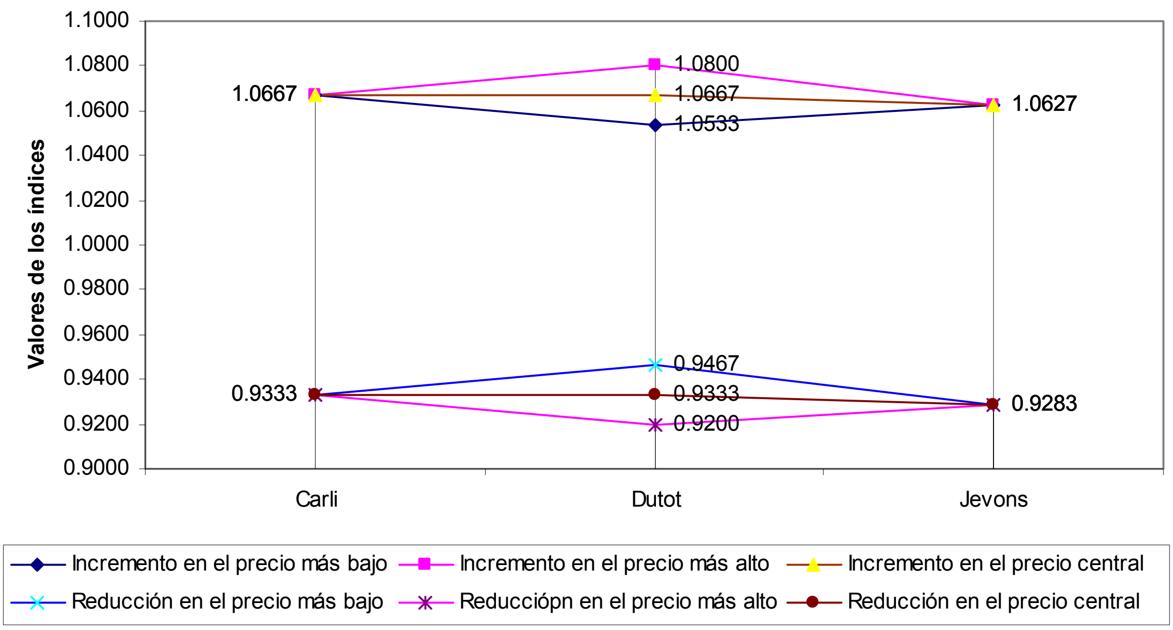
A partir de la expresión [8] se concluye que los índices de Jevons y Dutot tienden a ser iguales cuando las dispersiones de los precios medios coinciden para los dos períodos de tiempo que se comparan. Sobre la base de la expresión [10] es obvio que los índices de Jevons y Carli también se igualan cuando la dispersión de los ratios de precios es igual a cero, es decir, cuando todos los precios presentan un mismo cambio relativo. En caso contrario, el índice de Jevons siempre es inferior al obtenido con Carli. Sin embargo, el índice de Dutot se puede situar, según el caso, por encima o por debajo del de Jevons, representando el primero unas preferencias del consumidor con cantidades proporcionales, tipo Leontief, y el segundo con gastos proporcionales, tipo Cobb-Douglas.

3. Las fórmulas elementales en el índice de precios de consumo armonizado

La Unión Europea, a la hora de elaborar los IPCA de cada uno de sus países miembros, da libertad a los mismos para elegir entre la fórmula de Dutot y la de Jevons, para calcular los índices de los agregados elementales. Incluso, bajo ciertas circunstancias, autoriza el uso de la fórmula de Carli [Commission of the European Communities (2000), pag. 52)].

Como una primera aproximación a las diferencias que se pueden obtener al hacer uso de una u otra fórmula, supóngase que para un determinado agregado elemental se recogen tres precios, correspondientes cada uno de ellos a un establecimiento distinto. En el instante base, estos precios son 40, 50 y 60 euros. En el gráfico 1 se representan los valores de los índices elementales de Dutot, Carli y Jevons para dicha parcela en 6 situaciones distintas. Tres se corresponden con un incremento del 20%. En un caso, en el precio más bajo, en otro en el más alto y el tercero en el precio intermedio. Las otras tres situaciones se refieren a una reducción, también del 20%, en cada uno de estos precios. Como es lógico, las situaciones de incremento de precios se reflejan en la parte alta del gráfico y las de reducción en la parte baja.

Gráfico 1. Efecto de un incremento/reducción del 20% en un único precio



El aspecto que más destaca en este gráfico en la gran variabilidad del índice de Dutot. Es necesario destacar que si el precio que sube un 20% es el más alto, la inflación medida con esta fórmula es un 51% más alta que si se el precio que sube es el más bajo. En caso de que lo que se produzca es una reducción de precios, el comportamiento es simétrico con respecto al valor 1. Este resultado se justifica perfectamente en base a las ponderaciones implícitas que usa la fórmula de Dutot. El segundo elemento que destaca en el gráfico 1 es la asimetría de la fórmula de Jevons ante un incremento o disminución de los precios. Es decir, una subida del 20% para uno de los precios en el instante 0, supone una inflación del 6,3%, mientras que si es una bajada, ésta se cifra en un 7,2%. La diferencia de inflación en términos absolutos alcanza casi el 14,3%. Por último, el tercer elemento a destacar en el gráfico 1 es la distancia que hay entre el índice de Carli y el de Jevons[1]. Para los datos del ejemplo con el que se está trabajando, si los precios suben un 20%, el índice de Carli es un 6,3% más alto que el de Jevons, si los precios bajan un 20%, el índice de Carli mide una caída de la inflación del 6,7%, mientas que el de Jevons un 7,2%. Es decir, la caída es un 7,5% más fuerte con este último.

La razón de estas diferencias se encuentra en las fórmulas [8] y [10], expresiones estas que pueden re-escribirse como [12] y [13] respectivamente.

$$I_J \approx I_D * \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2_{p_i^0}}{\left(\overline{p}_i^0\right)^2} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2_{p_i^1}}{\left(\overline{p}_i^1\right)^2} \right] \qquad [12]$$

$$I_J \approx I_C \times \left[1 - \frac{1}{2} \times \frac{\sigma^2_{r_i}}{(\overline{r}_i)^2} \right] \qquad [13]$$

Denotando por $\sigma^2_{p_i^t}$ y $\overline{p}_i^t$ a la varianza y la media aritmética de los precios en el agregado elemental i en el instante t, y por $\sigma^2_{r_i}$ y $\overline{r}_i$ a la varianza y la media aritmética del ratio de precios.

Como se puede deducir de [12], las diferencias entre los valores obtenidos con las fórmulas de Jevons y Dutot se deben a los cambios en el cuadrado de la dispersión relativa de los precios entre los dos instantes de tiempo que se comparan. Si esta dispersión crece del instante cero con respecto al instante uno, el índice elemental de Jevons será inferior al de Dutot, en caso contrario será superior. ILO (2003) afirma que en condiciones normales la variabilidad no cambia, con lo cual ambos índices tienden a arrojar la misma cifra. A pesar de ello, señalan dos situaciones en las cuales se pueden producir diferencias significativas entre ambos índices: cuando se producen cambios fuertes en la inflación global y cuando se dispone de pocos precios dentro del estrato elemental i. Estas dos situaciones se justifican por los cambios que se pueden producir en los datos muestrales.

Sin embargo, las diferencias entre ambos índices tienen una interpretación teórica. Si la dispersión relativa de los precios en un agregado elemental crece desde un instante base a un instante actual, se debe a que el mercado de ese agregado elemental se ha hecho menos

[1] Recordemos que el problema de la fórmula de Carli es que incumple la propiedad de reversión temporal, propiedad de gran importancia en un IPC de tipo encadenado, como es el caso del IPCA.

transparente para el consumidor, añadiéndole dificultad para localizar el producto a un menor precio o encontrar un sustituto del mismo más barato. En este sentido, el índice de Jevons se calcula bajo el supuesto de que la transparencia del mercado para el consumidor es la misma en los dos instantes de tiempo que se compararan, mientras que el índice de Dutot corrige al de Jevons al considerar que si los precios presentan menos variabilidad (relativa) el consumidor tendrá más facilidad para comprar los bienes y servicios más baratos. En la misma línea se podrían interpretar las diferencias que existen entre el índice de Jevons y el de Carli. Ambos son iguales cuando todos los precios tienen en mismo cambio relativo, con lo cual todos los consumidores sufren el mismo cambio relativo en sus gastos.

Volviendo a las expresiones [12] y [13], se deduce directamente que el índice de Dutot no es invariante ante desplazamientos aditivos de los precios y sí lo es si el desplazamiento es multiplicativo, lo cual sería equivalente a un desplazamiento aditivo de los índices, lo que a su vez implica que las diferencias absolutas entre el índice de Carli y Dutot permanecen constantes. Por el contrario, si el desplazamiento en los índices es multiplicativo, lo que permanece constante es la diferencia entre Carli y Jevons.

En cualquier caso, los tres índices presentan unos resultados ante cambios en los precios que difícilmente se pueden ajustar al comportamiento teórico esperado por parte del consumidor. Para ver algunas de estas incongruencias volvemos al ejemplo de los tres precios que se ha estudiado anteriormente. Esto es, 40, 50 y 60 unidades monetarias en los establecimientos 1,2 y 3 respectivamente.

Comencemos por el índice de Jevons. Supongamos que el precio más alto se reduce un 10%. En esta situación los nuevos precios son 40, 50 y 54 unidades monetarias en los establecimientos 1,2 y 3 respectivamente. Comparando los precios iniciales y los finales no es previsible un cambio de demanda en los establecimientos. Es decir, los consumidores que compraban en el instante 0 en los establecimientos 1 y 2, lo seguirán haciendo en t=1, ya que sus precios no han cambiado y, además, el precio en el tercer establecimiento aún es superior al del suyo. Por otra parte, los que ya consumían en el establecimiento más caro lo seguirán haciendo, aunque a un precio inferior. En esta situación, I_J=0,9655, valor que coincide con el caso en el cual es el precio más bajo el que se reduce un 10%. Sin embargo, la situación en términos de demanda es en este segundo caso completamente distinto. Los nuevos precios son 36, 50 y 60 unidades monetarias en los establecimientos 1, 2 y 3 respectivamente. Ahora, todos los consumidores que compraban en el establecimiento 1 lo seguirán haciendo, puesto que en el instante 1 el precio es más barato que en 0. Como se puede observar, en este caso la reducción en el precio del producto afecta a muchos más consumidores que en el caso anterior. Por una parte, afecta a la totalidad de consumidores que dirigían su demanda al establecimiento 1, que, por ser el más barato, es de suponer que presentaba una demanda superior a los otros dos. Por otra parte, consumidores que consumían antes en los establecimientos 2 y 3 se pasarán a consumir en el establecimiento 1.

Dado que I_J toma el mismo valor en ambos casos, es evidente que no refleja correctamente el comportamiento del consumidor. La misma crítica es aplicable a I_C, puesto que para su cálculo solo se tienen en cuenta los índices y no los precios, lo que conlleva tratar de forma equivalente el cambio en cualquiera de los precios, no discriminando el hecho de que dependiendo de que el precio que cambio es más o menos grande puede producir distintas reacciones en los consumidores. El I_D es incluso más incongruente, al ponderar el ratio de precios directamente por el precio en el instante base, lo que implica que si es el precio más alto es el que sube su ponderación es mucho más elevada. Por el contrario, si el precio más bajo se reduce, este adquiere menor peso relativo, cuando lo esperado es que incremente su demanda y, por tanto, su peso.

La fórmula del número índice del agregado elemental debiera tener en cuenta el comportamiento del consumidor descrito anteriormente. Si se acepta, además, que los establecimientos con los precios más bajos deben presentar una mayor demanda, ello nos conduce a que la fórmula de cálculo del índice elemental debe estar ponderada de forma inversa por los precios de partida. Es decir, definimos ${}^{k}f_i^t$ como [14].

$$ {}^{k}f_i^t = \frac{\sum_{k=1}^{K_i} {}^{k}p_i^t}{{}^{k}p_i^t} \qquad [14] $$

Y la ponderación como [15].

$$ {}^{k}w_i^t = \frac{{}^{k}f_i^t}{\sum_{k=1}^{K_i} {}^{k}f_i^t} \qquad [15] $$

Estas ponderaciones son inversamente proporcionales al tamaño de los precios en el instante actual t.

La fórmula del índice elemental debe incluir estas ponderaciones. Una posible fórmula es [16].

$$I_{A(t/0)} = \left[\sum_{k=1}^{K_i} {}^k w_i^0 \times \left(\frac{{}^k p_i^t}{{}^k p_i^0} \right)^{-1} \right]^{-1} \qquad [16]$$

Esta fórmula cumple la propiedad de reversión temporal y, además, discrimina por el hecho de que los precios que cambian sean los más altos o los más bajos. En el anexo 1 se muestran los cálculos para obtener I_A con los datos de la tabla 1 y se comprueba que éstos cumplen la propiedad de reversión temporal. El cumplimiento de esta propiedad en el índice elemental es considerada por Fisher (1922) como fundamental, hasta el punto de que descarta el uso de la fórmula de Carli por no cumplirla, diciendo que el uso de la media aritmética de los índices produce uno de los peores errores en la elaboración de los números índices [Fisher (1922), páginas 29-30].

La demostración analítica de que I_A cumple la propiedad de reversión temporal es la siguiente. Sean 0, t' y t tres instantes temporales tales que 0<t'<t. Denotemos por $\{ {}^k p_i^0 \}, \{ {}^k p_i^{t'} \}$ y $\{ {}^k p_i^t \}$ los precios en el agregado elemental i en cada uno de los instantes de tiempo correspondientes a los establecimientos k={1,2,...,K_i}. Supongamos que se produce una reversión temporal desde el instante 0 al t, lo cual implica que ${}^k p_i^0 = {}^k p_i^t$ para todo k. La fórmula I_A cumple la propiedad de reversión temporal si se verifica [17].

$$I_{A(t'/0)} \times I_{A(t/t')} = 1 \qquad [17]$$

Sustituyendo [16] en [17] y teniendo en cuenta que los precios en el instante 0 son iguales a los precios en el instante t, la propiedad de reversión temporal se cumple si se verifica [18].

$$\left[\sum_{k=1}^{K_i} {}^k w_i^0 \times \left(\frac{{}^k p_i^0}{{}^k p_i^{t'}} \right) \right]^{-1} \times \left[\sum_{k=1}^{K_i} {}^k w_i^{t'} \times \left(\frac{{}^k p_i^{t'}}{{}^k p_i^0} \right) \right]^{-1} = 1 \qquad [18]$$

Sustituyendo [14] en [15], se puede escribir la ponderación en un instante de tiempo genérico t como [19].

$${}^k w_i^t = \frac{1}{{}^k p_i^t \times \sum_{k=1}^{K_i} \frac{1}{{}^k p_i^t}} \qquad [19]$$

Por último, reemplazando [19] en [18] y reordenando adecuadamente los términos se obtiene [20], que demuestra el cumplimiento de la propiedad de reversión temporal de I_A.

$$\left(\sum_{k=1}^{K_i} \frac{1}{{}^k p_i^{t'}} \right) \times \left(\sum_{k=1}^{K_i} \frac{1}{{}^k p_i^0} \right) = \left(\sum_{k=1}^{K_i} \frac{1}{{}^k p_i^{t'}} \right) \times \left(\sum_{k=1}^{K_i} \frac{1}{{}^k p_i^0} \right) \qquad [20]$$

Partiendo de esta última expresión, es inmediato demostrar que I_A no es más que el cociente entre la suma de los inversos de los precios en el instante 0 y 1.

$$I_A = \frac{\sum_{k=1}^{K_i} \frac{1}{{}^k p_i^0}}{\sum_{k=1}^{K_i} \frac{1}{{}^k p_i^1}} \qquad [21]$$

Dado que los precios son siempre mayores que cero, el I_A existe siempre y es una función continua para cualquier par de conjuntos de precios ${}^k p_i^0$ y ${}^k p_i^1$ con k={1,2,...,K_i}. Además, I_A cumple la propiedad de identidad, puesto que de [21] es inmediato demostrar que si ${}^k p_i^0 = {}^k p_i^1 \ \forall k = \{1, 2, ..., K_i\}$, el valor de I_A es igual a 1.

Igualmente sencillo de demostrar son las propiedades de comportamiento monótono, tanto en los precios actuales como en los precios base. Es decir, partiendo de unos precios iniciales para el agregado elemental i, ${}^k p_i^0$, y ante dos posibles situaciones de crecimiento de los precios en el instante actual 1, denotadas por ${}^k p_i^{1,a}$ y ${}^k p_i^{1,b}$, tal que los precios en la situación a son mayores que en la situación b, la propiedad de monotonía sobre el instante actual implica que se cumpla que $I_{A(a/0)} > I_{A(b/0)}$. La propiedad de monotonía sobre el instante base parte de dos situaciones en el instante base, denotadas por ${}^k p_i^{0,a}$ y ${}^k p_i^{0,b}$, tal que los precios en la situación a son mayores que en b. Bajo estas circunstancias y suponiendo crecimiento entre ambas situaciones con respecto al instante actual 1, el cumplimiento de esta propiedad exige que el $I_{A(1/a)} < I_{A(1/b)}$.

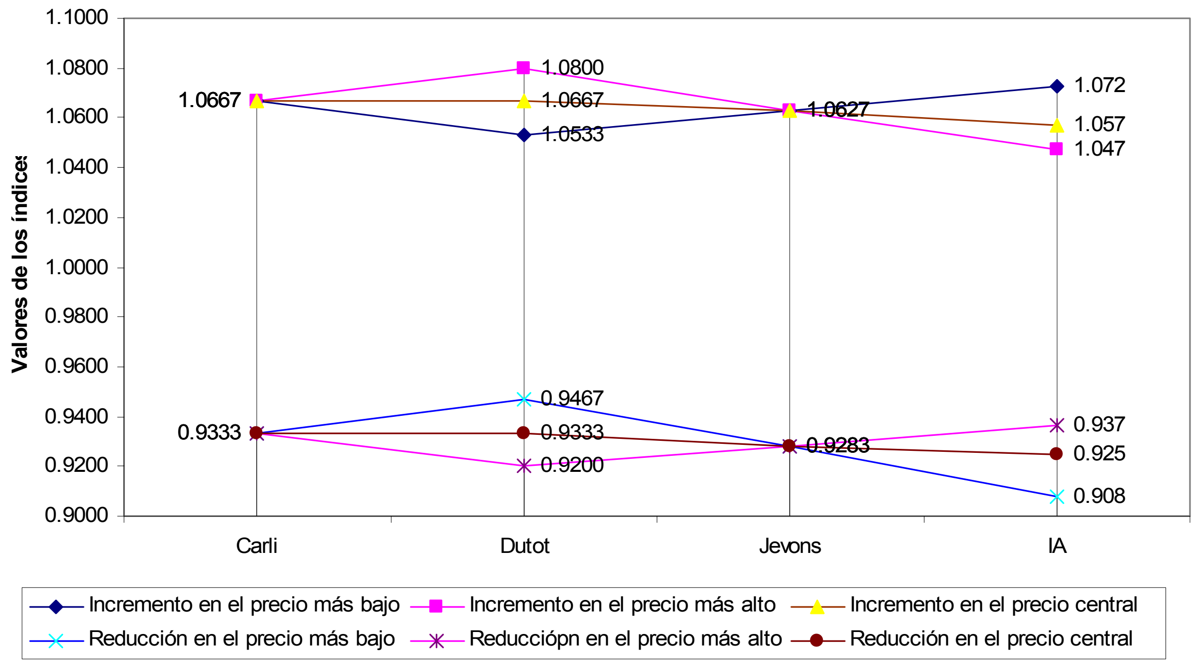
Tampoco presenta ninguna dificultad la demostración de que I_A cumple las propiedades de proporcionalidad, directa sobre el período actual e inversa sobre el período base. La primera indica que si se multiplican los precios en el período actual por una constante positiva, el índice se ve multiplicado por dicha constantes. La segunda establece que si los precios en el instante base se multiplican por una constante positiva, el índice se multiplica por la inversa de dicha constante. El cumplimiento de todas las propiedades anteriores implica el cumplimiento de la propiedad del valor medio [Eichhorn (1978), página 155], por la cual el índice del estrato elemental i se encuentra entre el valor más pequeño y más grande de los ratios de precios para cada k.

Como última propiedad, destacamos el cumplimiento por parte de I_A de la propiedad de tratamiento simétrico de cada uno de los establecimientos, dado que el orden de los precios no afecta al resultado final del índice.

Para analizar el efecto de los cambios en precios sobre el I_A se vuelven a utilizar los datos de precios de los tres establecimientos y se rehace el gráfico 1, incorporando el nuevo índice. El resultado se muestra en el gráfico 2. Como se puede observar, y era de esperar, el comportamiento de I_A es opuesto al de Dutot, puesto que en la nueva fórmula cada cambio pondera de forma inversa a la importancia del precio en el instante 0, mientras que en I_D la ponderación es directa. Esto significa que si, por ejemplo, los precios suben, su repercusión sobre el valor del índice del agregado elemental i será mayor cuando el que sube es el precio más bajo. En este caso, todos los consumidores que compraban a este precio, que, por otra parte, dado que era el precio más bajo se supone que presentaba una mayor demanda, se ven obligados a pagar un precio más alto. Es decir, cuando el que sube es el precio más bajo esto afecta más a los consumidores y, por tanto, el cambio debe trasladarse con más fuerza sobre el índice del agregado elemental. Por el contrario, cuando el precio que sube es el más alto, habrá consumidores que no están dispuestos a pagar este incremento y se pasarán a comprar en un establecimiento con precio más bajo. Esto implica que solo los que ya pagaban un precio alto se ven afectados por el incremento. Además de que el establecimiento más caro debe presentar una menor demanda, para algunos consumidores el precio se reduce, ya que cambian de establecimiento pasando a uno con precio inferior.

En definitiva, si el precio que se incrementa es el más alto, su efecto sobre el índice del agregado elemental debe de ser inferior al caso de que lo que se incremente sea el precio más barato. Este efecto, como ya se ha dicho, no lo tiene en cuenta ni la fórmula de Jevons ni la de Dutot, mientras que I_A sí lo recoge, como a continuación se demuestra. Con los datos del ejemplo, la inflación en el agregado elemental i, ante un incremento del 20%, pasa del 4,7% al 7,2% dependiendo de si el precio que sube es el más alto o el más bajo respectivamente.

Gráfico 2. Efecto de un incremento/reducción del 20% en un único precio



Ante un proceso de reducción de precios el índice I_A vuelve a manifestarse en congruencia con la teoría del consumidor. Tal y como se observa en la parte inferior del gráfico 2, si lo que se reduce es el precio más alto, esto afectará a menos consumidores que son los que pagaban este precio. En principio, los consumidores de los establecimientos 1 y 2 seguirán comprando en sus establecimientos habituales (a no ser que la reducción de precios en el establecimiento 3 sea tan fuerte que deje de ser el más caro). Ahora bien, si la reducción se produce en el establecimiento con el precio más bajo, todos los consumidores de este establecimiento se beneficiaran de esta reducción y, además, a los consumidores de otros establecimientos más caros ahora les puede resultar rentable pasar a consumir en un punto de venta más barato. Siguiendo este criterio, el índice del agregado elemental debe recoger una caída más fuerte en los precios cuando el precio que baja es el más bajo. En los datos del ejemplo, el I_A es igual a 0,908, cuando lo que se produce es una reducción en el precio más bajo, frente al valor 0,937, cuando lo que se reduce es el precio más alto. En términos de inflación y para los datos del ejemplo, la diferencia en la caída de precios en el agregado elemental i es un 47,6% más fuerte cuando la reducción se produce en el precio más bajo con respecto a la misma reducción en el precio más alto.

4. Conclusiones

En el trabajo se demuestra la inconsistencia que presentan las fórmulas habitualmente utilizadas para el cálculo de los índices en los agregados elementales de un IPC. En concreto, se analizan las fórmula de Dutot, Carli y Jevons por ser las que la Comunidad Europea permite a la hora de elaborar el IPCA, llegando a la conclusión de que ninguna de ellas reproduce al comportamiento habitual de los consumidores ante un cambio en los precios. A partir de estos resultados y bajo las hipótesis: a) los precios más bajos acaparan más demanda; b) los cambios de demanda se producen con signo positivo ante reducción en los precios y de forma negativa ante un incremento, se define una nueva fórmula para el índice del agregado elemental como la media armónica de los ratios de precios ponderada de forma inversa por el tamaño del precio en el instante de referencia. Esta nueva fórmula se ajusta al comportamiento de las hipótesis planteadas sobre la Teoría del Consumidor y, además, cumple todas las propiedades generalmente aceptadas para los índices elementales, incluyendo la de reversión temporal, propiedad ésta de importancia capital cuando la estructura del índice es de tipo encadenado, como es el caso del IPCA.

BIBLIOGRAFÍA

Advisory Commission To The Study The Consumer Price Index (1996): "Toward a More Accurate Measure of The Cost of Living", Final Report To The Senate Finance Committee, Washington, December 4.

Balk, B.M. (1991): "On the First Step in the Calculation of a Consumer Price Index", unpublished paper presented at the Joint ECE/ILO Meeting on Consumer Price Indices, Geneva, November 18-21.

Balk, B.M. (1995): "Axiomatic Price Index Theory: A Survey", *International Statistical Review* 63, pp. 69-93.

Balk, B.M. (1998): *Industrial Price, Quantity and Productivity Indices*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Boon, M. Opperdoes, E. y Schut, C. (1997): "Effects of Outlet Sampling on Consumer Price Indices: A Case Study Using Scanner Data", Statistics Netherlands, BPA nº 97-RSM, November.

Carruthers, A.G., Sellwood, D.J. y Ward, P.W. (1980): "Recent Developments in the Retail Prices Index", *The Statistician,* 29, pp. 1-32.

Commission of the European Communities (2000): "On the Harmonization of Consumer Price Indices in the European Union", Report from the Commission to the Council. Com (2000) 742 final, Brussels: European Commission.

Dalen, J. (1992): "Computing Elementary Aggregates in the Swedish Consumer Price Index", *Journal Of Official Statistics*, volumen 8, n. 2.

Dalton, K., Greenlees, J. y Stewart, K. (1998): "Incorporating a Geometric Mean Formula Into the CPI", *Monthly Labor Review*, October

Diewert, W. (1995): "Axiomatic and Economic Approaches to Elementary Price Indexes", Discussion Paper Nº 95-01, Department of Economics, University of British Columbia, Vancouver, Canada.

Diewert, W. (1996): "Comment on CPI Biases", Departament of Economics, The University of British Columbia, Discussion paper nº 96-07.

Eichhorn, W. (1978): *Functional Equations in Economics,* Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

Fisher, I. (1922): *The Making of the Index Numbers*, Houghton-Mifflin, Boston.

ILO (2003): *CPI Manual*, Electronic Document: http://www.ilo.org/public/ english/bureau/stat /guides/cpi/, International Labour Organization.

Mounton, B. (1993): "Basic Components of the CPI: Estimation of Price Changes", *Monthly Labor Review*, December.

Reinsdorf, M. y Moulton, B. (1994): "The Construction of Basic Components of the Cost of Living Indexes", unpublished Working Paper 252, Washington, March, Bureau of Labor Statistics,.

Sellwood, D.J. (1987): "Reduction of Errors in a Consumer Price Index", *Bulletin Of Labour Statistics* 2, Génova.

Schultz, B. (1995): "Choice of Price Index Formulae at the Micro-Aggregation Level: The Canadian Empirical Evidence", Prices Division, Statistics Canada.

Turkey, R. (1989): *Consumer Price Indices*, ILO Manual, Génova.

Anexo 1. Propiedad de reversión temporal del I_A

	Puntos de venta(k)		${}^{k}f_i^{t}$		${}^{k}w_i^{t}$		$[{}^{k}p_i^{t}/{}^{k}p_i^{0}]^{-1}$		L1	$[{}^{k}p_i^{t}/{}^{k}p_i^{t-1}]^{-1}$		L2	L3
Tiempo(t)	k=1	k=2	${}^{1}f_i^{t}$	${}^{2}f_i^{t}$	${}^{1}w_i^{t}$	${}^{2}w_i^{t}$	$[{}^{1}p_i^{t}/{}^{1}p_i^{0}]^{-1}$	$[{}^{2}p_i^{t}/{}^{2}p_i^{0}]^{-1}$	$I_{A(t/0)}$	$[{}^{1}p_i^{t}/{}^{1}p_i^{t-1}]^{-1}$	$[{}^{2}p_i^{t}/{}^{2}p_i^{t-1}]^{-1}$	$I_{A(t/t-1)}$	
t=0	12	15	2.25	1.8	0.556	0.444	1	1	1.000				1
t=1	20	14	1.7	2.429	0.412	0.588	0.6	1.071	1.235	0.600	1.071	1.235	1.235
t=2	12	15	2.25	1.8	0.556	0.444	1	1	1.000	1.667	0.933	0.810	1.000